2019年苏州市初中毕业暨升学考试试卷

数　　学

本试卷由选择题、填空题和解答题三大题组成.共28小题,满分130分.考试时间120分钟.

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考点名称、考场号、座位号用0.5毫米黑色墨水签字笔填写在答题卡相应位置上,并认真核对条形码上的准考号、姓名是否与本人的相符;
2. 答选择题必须用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,请用橡皮擦干净后,再选涂其他答案;答非选择题必须用0.5毫米黑色墨水签字笔写在答题卡指定的位置上,不在答题区域内的答案一律无效,不得用其他笔答题;
3. 考生答题必须答在答题卡上,保持卡面清洁,不要折叠,不要弄破,答在试卷和草稿纸上一律无效.

一、选择题:本大题共10小题,每小题3分,共30分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.请将选择题的答案用2B铅笔涂在答题卡相应位置上.

1. 5的相反数是

A. $\frac{1}{5}$　　B. $-\frac{1}{5}$　　C. 5　　D. -5

2. 有一组数据:2,2,4,5,7,这组数据的中位数为

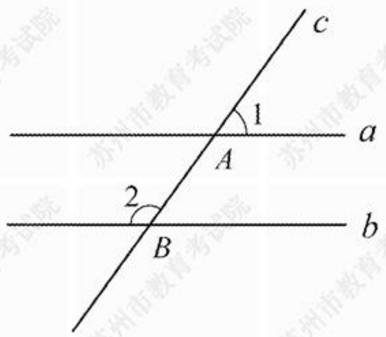
A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. 7

3. 苏州是全国重点旅游城市,2018年实现旅游总收入约为26 000 000万元,数据26 000 000用科学记数法可表示为

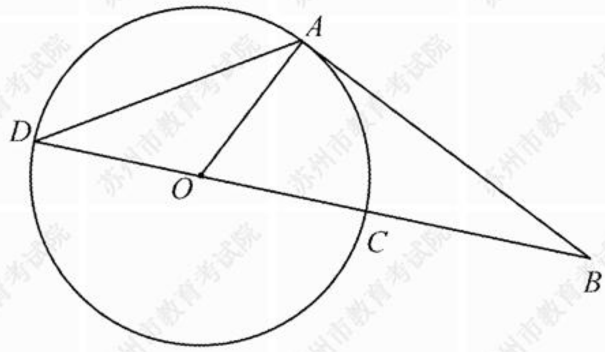
A. 0.26×10^8　　B. 2.6×10^8　　C. 26×10^6　　D. 2.6×10^7

4. 如图,已知直线$a\parallel b$,直线c与直线a,b分别交于点A,B. 若$\angle1=54°$,则$\angle2$等于

A. 126°　　B. 134°　　C. 136°　　D. 144°



(第4题)



(第5题)

5. 如图,AB为$\odot O$的切线,切点为A.连接AO,BO,BO与$\odot O$交于点C.延长BO与$\odot O$交于点D,连接AD.若$\angle ABO=36°$,则$\angle ADC$的度数为

A. 54°　　B. 36°　　C. 32°　　D. 27°

6. 小明用15元买售价相同的软面笔记本,小丽用24元买售价相同的硬面笔记本(两人的钱恰好用完).已知每本硬面笔记本比软面笔记本贵3元,且小明和小丽买到相同数量的笔记本.设软面笔记本每本售价为x元,根据题意可列出的方程为

A. $\frac{15}{x}=\frac{24}{x+3}$　　B. $\frac{15}{x}=\frac{24}{x-3}$

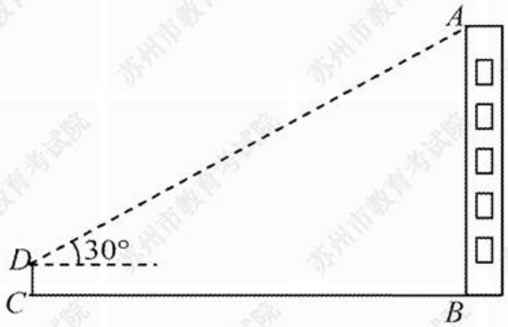
C. $\frac{15}{x+3}=\frac{24}{x}$　　D. $\frac{15}{x-3}=\frac{24}{x}$

7. 若一次函数$y=kx+b$(k、b为常数,且$k\neq0$)的图像过点$A(0,-1)$,$B(1,1)$,则不等式$kx+b>1$的解集为

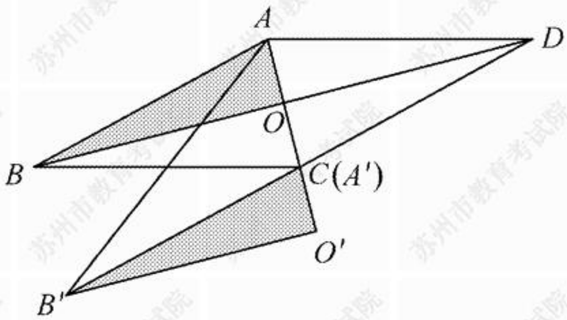
A. $x<0$　　B. $x>0$　　C. $x<1$　　D. $x>1$

8. 如图,小亮为了测量校园里教学楼AB的高度,将测角仪CD竖直放置在与教学楼水平距离为$18\sqrt{3}$ m的地面上,若测角仪的高度是1.5m,测得教学楼的顶部A处的仰角为30°,则教学楼的高度是

A. 55.5 m　　B. 54 m　　C. 19.5 m　　D. 18 m



(第8题)



(第9题)

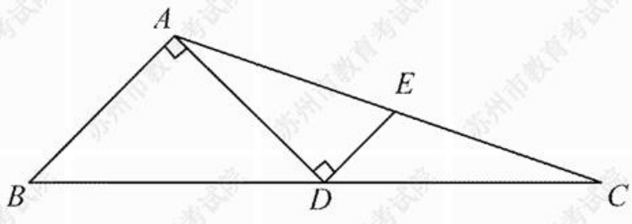
9. 如图,菱形$ABCD$的对角线AC,BD交于点O,$AC=4$,$BD=16$.将$\triangle ABO$沿点A到点C的方向平移,得到$\triangle A'B'O'$.当点A'与点C重合时,点A与点B'之间的距离为

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

10. 如图,在$\triangle ABC$中,点D为BC边上的一点,且$AD=AB=2$,$AD\perp AB$.过点D作$DE\perp AD$,DE交AC于点E.若$DE=1$,则$\triangle ABC$的面积为

A. $4\sqrt{2}$　　B. 4

C. $2\sqrt{5}$　　D. 8



(第10题)

二、填空题：本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分.把答案直接填在答题卡相应位置上.

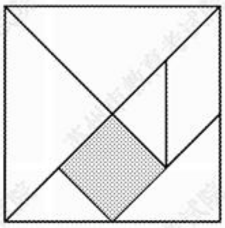
11. 计算：$a^2 \cdot a^3 =$ ____▲____.

12. 因式分解：$x^2 - xy =$ ____▲____.

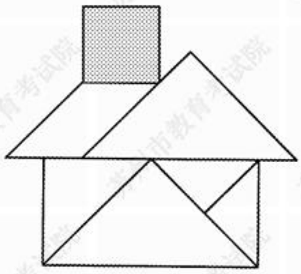
13. 若 $\sqrt{x-6}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围为____▲____.

14. 若 $a + 2b = 8$，$3a + 4b = 18$，则 $a + b$ 的值为____▲____.

15. “七巧板”是我们祖先的一项卓越创造，可以拼出许多有趣的图形，被誉为“东方魔板”.图①是由边长为 10cm 的正方形薄板分为 7 块制作成的“七巧板”，图②是用该“七巧板”拼成的一个“家”的图形.该“七巧板”中 7 块图形之一的正方形边长为____▲____cm(结果保留根号).

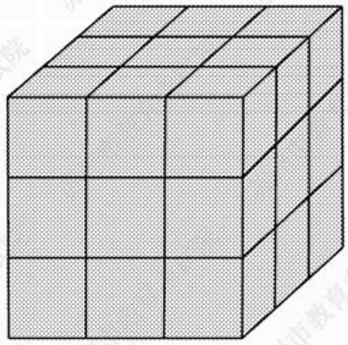


（图①）



（图②）

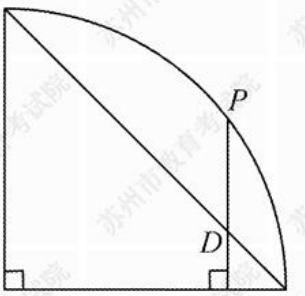
（第 15 题）



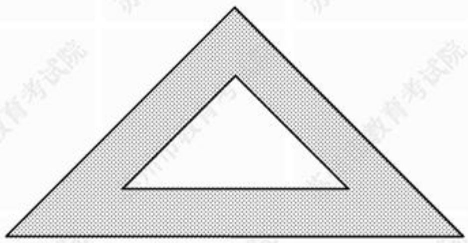
（第 16 题）

16. 如图，将一个棱长为 3 的正方体的表面涂上红色，再把它分割成棱长为 1 的小正方体，从中任取一个小正方体，则取得的小正方体恰有三个面涂有红色的概率为____▲____.

17. 如图，扇形 OAB 中，$\angle AOB = 90^\circ$. P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上的一点，过点 P 作 $PC \perp OA$，垂足为 C，PC 与 AB 交于点 D.若 $PD = 2$，$CD = 1$，则该扇形的半径长为____▲____.



（第 17 题）



（第 18 题）

18. 如图，一块含有 45°角的直角三角板，外框的一条直角边长为 8 cm，三角板的外框线和与其平行的内框线之间的距离均为 $\sqrt{2}$ cm，则图中阴影部分的面积为____▲____cm^2(结果保留根号).

三、解答题：本大题共 10 小题，共 76 分.把解答过程写在答题卡相应位置上，解答时应写出必要的计算过程、推演步骤或文字说明.作图时用 2B 铅笔或黑色墨水签字笔.

19.（本题满分 5 分）

计算：$(\sqrt{3})^2+|-2|-(\pi-2)^0$.

20.（本题满分 5 分）

解不折等式组：$\begin{cases} x+1<5, \\ 2(x+4)>3x+7. \end{cases}$

21.（本题满分 6 分）

先化简，再求值：$\dfrac{x-3}{x^2+6x+9}\div\left(1-\dfrac{6}{x+3}\right)$，其中 $x=\sqrt{2}-3$.

22.（本题满分 6 分）

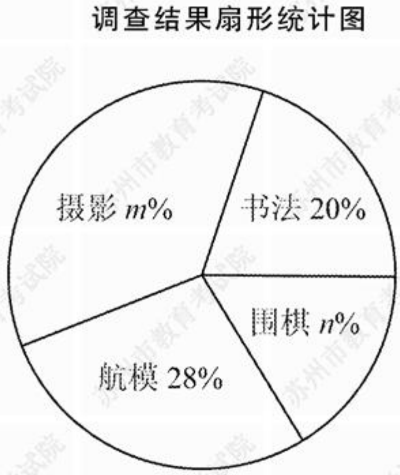
在一个不透明的盒子中装有 4 张卡片，4 张卡片的正面分别标有数字 1，2，3，4，这些卡片除数字外都相同，将卡片搅匀.

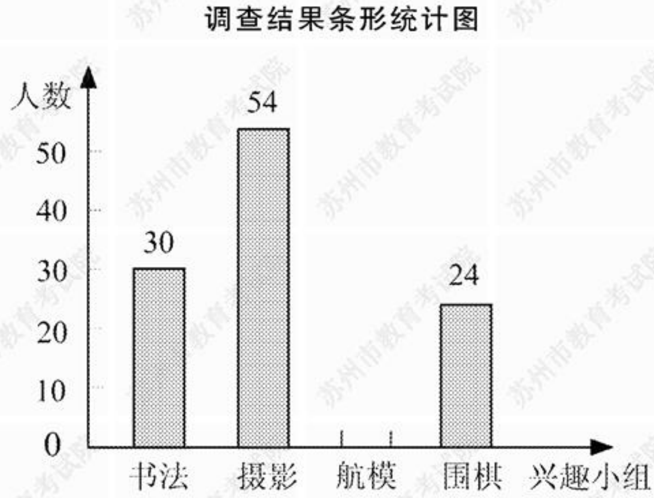
(1)从盒子中任意抽取一张卡片，恰好抽到标有奇数数字卡片的概率是__▲__；

(2)先从盒子中任意抽取一张卡片，再从余下的 3 张卡片中任意抽取一张卡片，求抽取的 2 张卡片标有的数字之和大于 4 的概率（请用画树状图或列表等方法求解）.

23.（本题满分 8 分）

某校计划组织学生参加“书法”、“摄影”、“航模”、“围棋”四个课外兴趣小组，要求每人必须参加，并且只能选择其中的一个小组.为了解学生对四个课外兴趣小组的选择情况，学校从全体学生中随机抽取部分学生进行问卷调查，并把调查结果制成如图所示的扇形统计图和条形统计图（部分信息未给出），请你根据给出的信息解答下列问题：





（第 23 题）

(1)求参加这次问卷调查的学生人数，并补全条形统计图（画图后请标注相应的数据）；

(2)$m=$ ▲ ，$n=$ ▲ ；

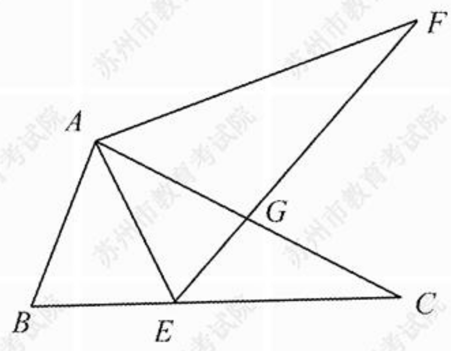
(3)若该校共有 1200 名学生，试估计该校选择“围棋”课外兴趣小组的学生有多少人？

24.（本题满分 8 分）

如图，△ABC 中，点 E 在 BC 边上，$AE=AB$.将线段 AC 绕点 A 旋转到 AF 的位置，使得 $\angle CAF=\angle BAE$.连接 EF，EF 与 AC 交于点 G.

(1)求证：$EF=BC$；

(2)若 $\angle ABC=65°$，$\angle ACB=28°$，求 $\angle FGC$ 的度数.



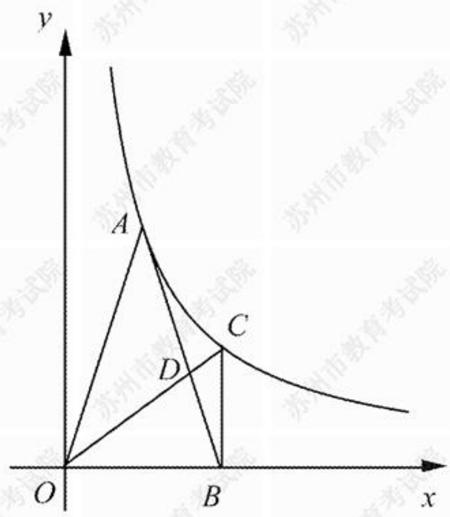
（第 24 题）

25. (本题满分 8 分)

如图,A 为反比例函数 $y=\frac{k}{x}$(其中 $x>0$)图像上的一点,在 x 轴正半轴上有一点 B,$OB=4$.连接 OA,AB,且 $OA=AB=2\sqrt{10}$.

(1)求 k 的值;

(2)过点 B 作 $BC\perp OB$,交反比例函数 $y=\frac{k}{x}$(其中 $x>0$)的图像于点 C,连接 OC 交 AB 于点 D,求 $\frac{AD}{DB}$ 的值.



(第 25 题)

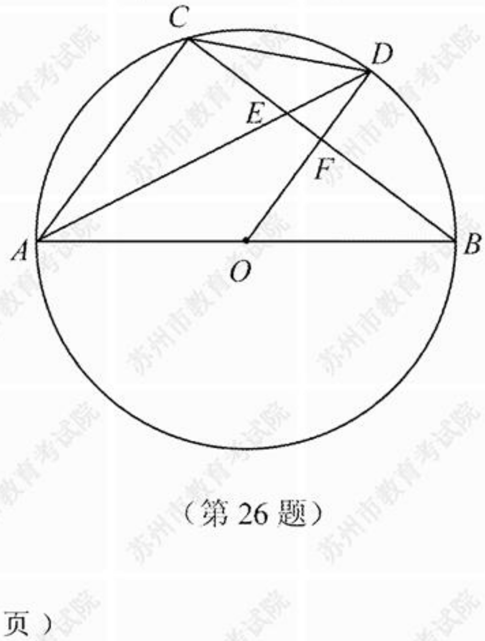
26. (本题满分 10 分)

如图,AB 为⊙O 的直径,C 为⊙O 上一点,D 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点.BC 与 AD,OD 分别交于点 E,F.

(1)求证:$DO\parallel AC$;

(2)求证:$DE\cdot DA=DC^2$;

(3)若 $\tan\angle CAD=\frac{1}{2}$,求 $\sin\angle CDA$ 的值.



(第 26 题)

27.（本题满分 10 分）

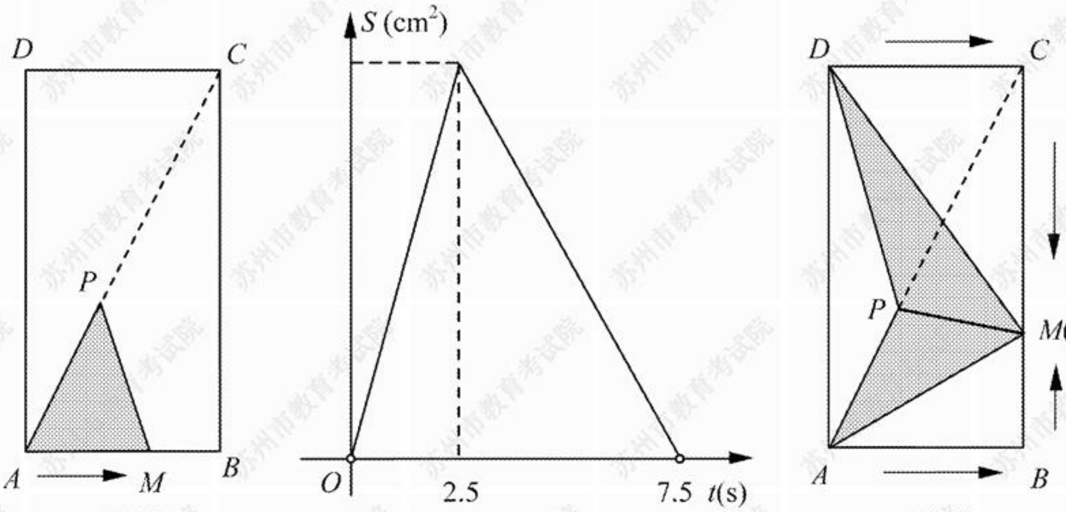
已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=5\text{cm}$，点 P 为对角线 AC 上的一点，且 $AP=2\sqrt{5}\text{ cm}$.如图①，动点 M 从点 A 出发，在矩形边上沿着 $A\to B\to C$ 的方向匀速运动（不包含点 C）.设动点 M 的运动时间为 t(s)，$\triangle APM$ 的面积为 S (cm^2)，S 与 t 的函数关系如图②所示.

(1)直接写出动点 M 的运动速度为 ▲ cm/s，BC 的长度为 ▲ cm；

(2)如图③，动点 M 重新从点 A 出发，在矩形边上按原来的速度和方向匀速运动.同时，另一个动点 N 从点 D 出发，在矩形边上沿着 $D\to C\to B$ 的方向匀速运动，设动点 N 的运动速度为 v (cm/s).已知两动点 M，N 经过时间 x(s)在线段 BC 上相遇（不包含点 C），动点 M，N 相遇后立即同时停止运动，记此时 $\triangle APM$ 与 $\triangle DPN$ 的面积分别为 S_1(cm^2)，S_2(cm^2).

①求动点 N 运动速度 v (cm/s)的取值范围；

②试探究 $S_1\cdot S_2$ 是否存在最大值.若存在，求出 $S_1\cdot S_2$ 的最大值并确定运动时间 x 的值；若不存在，请说明理由.



（图①）　　（图②）　　（图③）

（第 27 题）

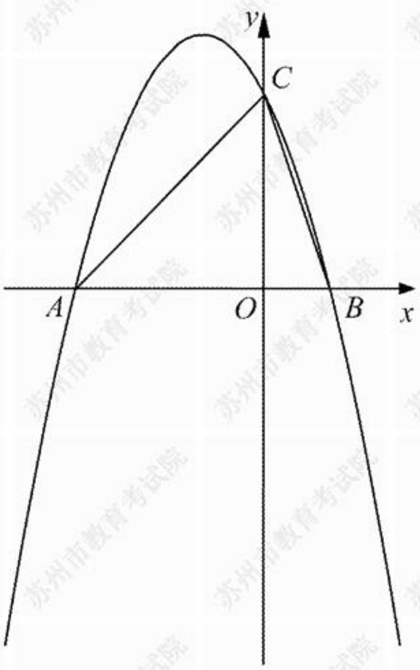
28.（本题满分 10 分）

如图①，抛物线 $y=-x^2+(a+1)x-a$ 与 x 轴交于 A，B 两点（点 A 位于点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C.已知 $\triangle ABC$ 的面积是 6.

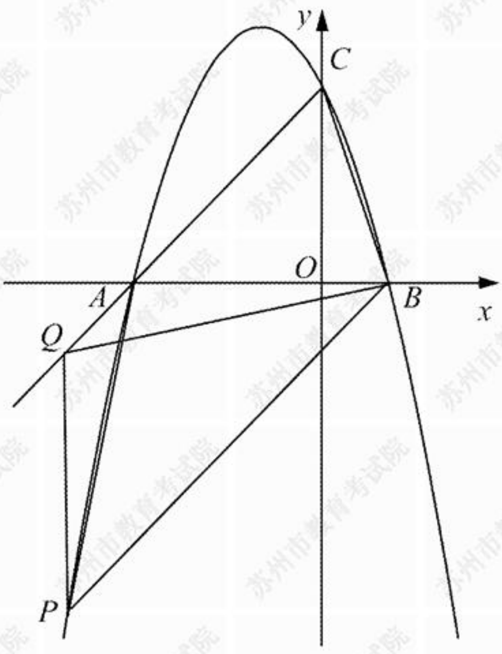
(1)求 a 的值；

(2)求 $\triangle ABC$ 外接圆圆心的坐标；

(3)如图②，P 是抛物线上一点，Q 为射线 CA 上一点，且 P，Q 两点均在第三象限内，Q，A 是位于直线 BP 同侧的不同两点.若点 P 到 x 轴的距离为 d，$\triangle QPB$ 的面积为 $2d$，且 $\angle PAQ=\angle AQB$，求点 Q 的坐标.



（图①）



（图②）

（第 28 题）

2019年苏州市初中毕业暨升学考试

数学试题参考答案

一、选择题：（每小题 3 分，共 30 分）

1．D	2．B	3．D	4．A	5．D
6．A	7．D	8．C	9．C	10．B

二、填空题：（每小题 3 分，共 24 分）

11．a^5	12．$x(x-y)$	13．$x \geqslant 6$	14．5
15．$\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$	16．$\dfrac{8}{27}$	17．5	18．$10+12\sqrt{2}$

三、解答题：（共 76 分）

19．（本题满分 5 分）

解：原式=3+2−1

=4.

20．（本题满分 5 分）

解：由 $x+1<5$，解得 $x<4$，

由 $2(x+4)>3x+7$，解得 $x<1$，

∴原不等式组的解集是 $x<1$.

21．（本题满分 6 分）

解：原式$=\dfrac{x-3}{(x+3)^2} \div \dfrac{x-3}{x+3}$

$=\dfrac{x-3}{(x+3)^2} \times \dfrac{x+3}{x-3} = \dfrac{1}{x+3}$.

当 $x=\sqrt{2}-3$ 时，原式$=\dfrac{1}{\sqrt{2}-3+3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

22．（本题满分 6 分）

解：（1）$\dfrac{1}{2}$；

（2）用表格列出所有可能出现的结果如下表：

第一张 \ 第二张	1	2	3	4
1		(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)		(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)		(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	

由表格可知，共有 12 种可能的结果，并且它们的出现是等可能的，其中两次抽取卡片数字和大于 4 的情况包括：(1,4)，(2,3)，(2,4)，(3,2)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3)共 8 种.

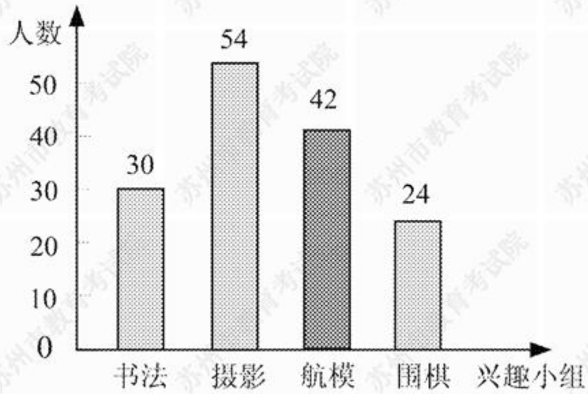
所以 P(抽取两张卡片数字和大于 4)=$\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$.

（若学生用树状图作答，相应给分）

23．（本题满分 8 分）

解：（1）$\dfrac{30}{0.20}=150$.

答：参加这次调查的学生人数为 150 人.



（2）m=36，n=16.

（3）$1200\times0.16=192$.

答：估计该校选择“围棋”课外兴趣小组的学生有 192 人.

24．（本题满分 8 分）

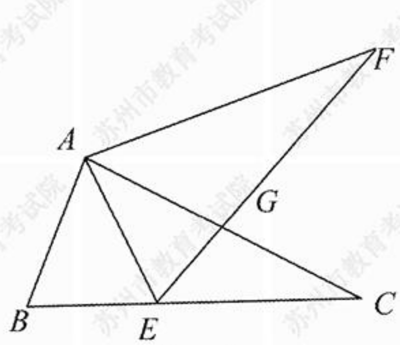
（1）证明：∵线段 AC 绕点 A 旋转到 AF 的位置，

∴AC=AF.

∵ $\angle CAF=\angle BAE$,

∴ $\angle CAF+\angle CAE=\angle BAE+\angle CAE$,

即 $\angle EAF=\angle BAC$.



（第 24 题）

在$\triangle ABC$和$\triangle AEF$中，$\begin{cases} AB = AE, \\ \angle BAC = \angle EAF, \\ AC = AF. \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AEF$（SAS），

$\therefore EF=BC$.

（2）解：$\because AE=AB$，$\therefore \angle AEB=\angle ABC=65°$.

$\because \triangle ABC \cong \triangle AEF$，$\therefore \angle AEF=\angle ABC=65°$，

$\angle FEC=180°-\angle AEB-\angle AEF=180°-65°-65°=50°$，

$\because \angle FGC$是$\triangle EGC$的外角，$\angle ACB=28°$，

$\therefore \angle FGC=\angle FEC+\angle ACB=50°+28°=78°$.

25．（本题满分8分）

解：（1）过点A作$AE \perp OB$于E.

$\because OA=AB=2\sqrt{10}$，$OB=4$，$\therefore OE=BE=\frac{1}{2}OB=2$，

在$\mathrm{Rt}\triangle OAE$中，$AE=\sqrt{OA^2-OE^2}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}=6$，

$\therefore$点A坐标为$(2,6)$.

$\because$点A是反比例函数$y=\frac{k}{x}$图像上的点，$\therefore 6=\frac{k}{2}$，解得$k=12$.

（2）记AE与OC的交点为F.

$\because OB=4$且$BC \perp OB$，点C的横坐标为4，

又$\because$点C为反比例函数$y=\frac{12}{x}$图像上的点，

$\therefore$点C的坐标为$(4,3)$，

$\therefore BC=3$.

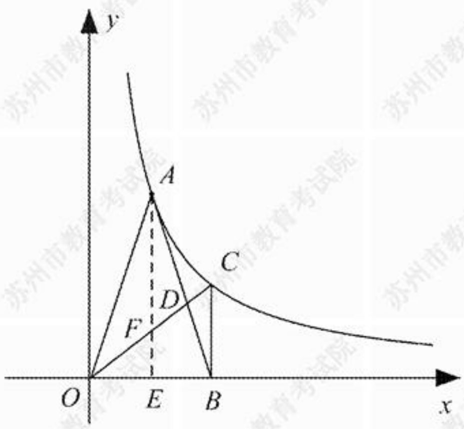
设直线OC的表达式$y=mx$，

将$C(4,3)$代入可得$m=\frac{3}{4}$，

$\therefore$直线OC的表达式$y=\frac{3}{4}x$，

$\because AE \perp OB$，$OE=2$，$\therefore$点F的横坐标为2，

将$x=2$代入$y=\frac{3}{4}x$可得$y=\frac{3}{2}$，即$EF=\frac{3}{2}$.



(第25题)

$\therefore AF=AE-EF=6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$.

$\because AE$，BC都与x轴垂直，$\therefore AE /\!/ BC$，$\therefore \angle AFD=\angle BCD$，$\angle FAD=\angle CBD$，

$\therefore \triangle ADF \backsim \triangle BDC$，

$\therefore \frac{AD}{DB}=\frac{AF}{BC}=\frac{3}{2}$.

26. （本题满分 10 分）

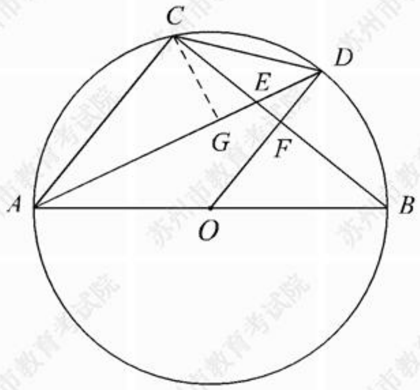
（1）证明：∵D 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，∴$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$，∴$\angle CAD=\angle BAD$，

∴$\angle CAB=2\angle BAD$.

在⊙O 中，$\angle DOB=2\angle BAD$.

∴$\angle CAB=\angle DOB$.

∴$DO /\!/ AC$.



(第26题)

（2）证明：∵$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$，∴$\angle CAD=\angle BCD$.

又∵$\angle ADC=\angle CDE$，

∴$\triangle ACD\backsim\triangle CED$.

∴$\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{DC}{DE}$，∴$DE\cdot DA=DC^2$.

（3）解：(方法一)作 $CG\perp AD$ 于 G.

∵AB 为⊙O 的直径，C 为⊙O 上一点，

∴$\angle ACB=90^\circ$.

∵$\tan\angle CAD=\dfrac{1}{2}$，∴$\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

设 $CE=k$ (k>0)，则 $AC=2k$，$AE=\sqrt{AC^2+CE^2}=\sqrt{(2k)^2+k^2}=\sqrt{5}k$.

∵$\triangle ACD\backsim\triangle CED$，∴$\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{ED}{CD}=\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

设 $DE=x$ (x>0)，则 $CD=2x$，$AD=4x$.

∵$AD=AE+DE$，∴$4x=\sqrt{5}k+x$，得 $x=\dfrac{\sqrt{5}}{3}k$.

∴$CD=2x=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}k$.

∵$CG\perp AD$，∴$\angle CGA=\angle CGD=90^\circ$，则 $\angle ACE=\angle CGA$.

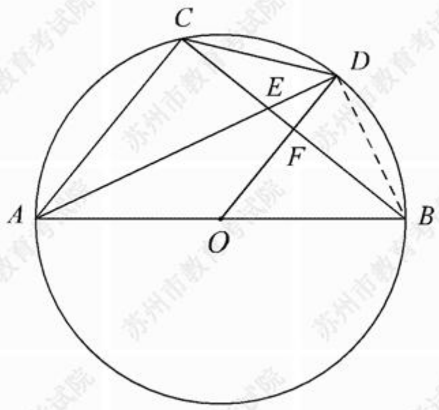
又∵$\angle CAE=\angle GAC$，∴$\triangle ACE\backsim\triangle AGC$.

∴$\dfrac{CE}{GC}=\dfrac{AE}{AC}$，即 $\dfrac{k}{GC}=\dfrac{\sqrt{5}k}{2k}$，∴$GC=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}k$.

在 Rt$\triangle CDG$ 中，$\sin\angle CDA=\dfrac{CG}{CD}=\dfrac{\frac{2\sqrt{5}}{5}k}{\frac{2\sqrt{5}}{3}k}=\dfrac{3}{5}$.

(方法二)连接 BD.

∵AB 为⊙O 的直径，C 为⊙O 上一点，



(第26题)

$\therefore \angle ACB=90^\circ$.

$\because DO /\!/ AC$，$\therefore \angle OFB=\angle ACB=90^\circ$ ，$\therefore \angle BFD=90^\circ$.

$\because \angle CAD=\angle CBD$（同弧所对的圆周角相等）.

$\therefore \tan\angle CBD=\tan\angle CAD=\dfrac{1}{2}$，　$\therefore \dfrac{DF}{BF}=\dfrac{1}{2}$.

设 $DF=k$ ($k>0$)，则 $BF=2k$．设 $OB=OD=r$，则 $OF=OD-DF=r-k$.

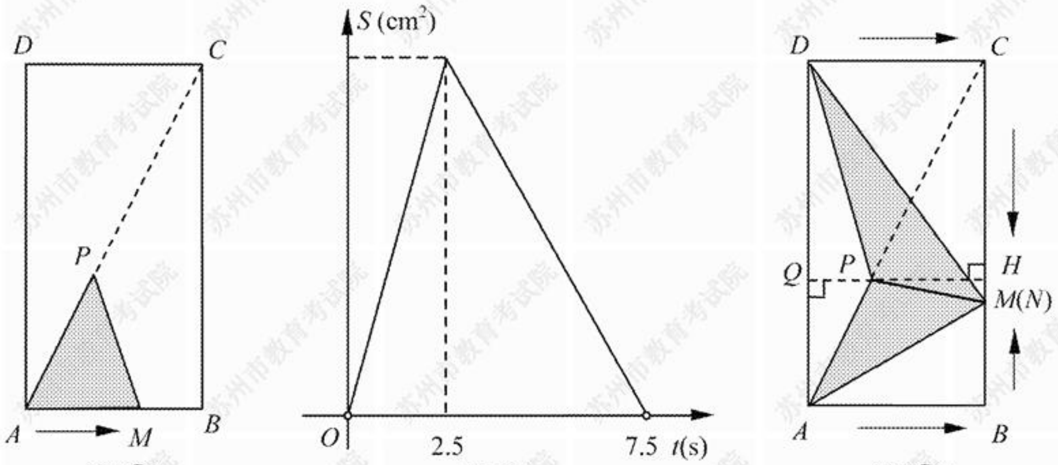
在 Rt$\triangle BOF$ 中，有 $OF^2+BF^2=OB^2$.

即 $(r-k)^2+(2k)^2=r^2$ ，化简得 $r=\dfrac{5}{2}k$.

$\therefore OF=OD-DF=r-k=\dfrac{3}{2}k$ ．$\therefore \sin\angle CBA=\dfrac{OF}{OB}=\dfrac{\frac{3}{2}k}{\frac{5}{2}k}=\dfrac{3}{5}$.

$\because \angle CDA=\angle CBA$（同弧所对的圆周角相等）．$\therefore \sin\angle CDA=\sin\angle CBA=\dfrac{3}{5}$.

27．（本题满分 10 分）



（图①）　　（图②）　　（图③）

（第 27 题）

解：（1）2，10；

（2）①$\because$动点 M，N 相遇后停止运动，

$\therefore$动点 M 和动点 N 运动的距离之和为 $AB+BC+DC=20$(cm).

又$\because$动点 M，N 运动速度分别是 2(cm/s)，v(cm/s)，且两个动点的运动时间均为 x(s)，

$\therefore 2x+xv=20$ ，$\therefore v+2=\dfrac{20}{x}$.

∵动点 M，N 在线段 BC 上相遇(不包含点 C)，

∴ $5 \leqslant 2x < 15$，解得 $\frac{5}{2} \leqslant x < \frac{15}{2}$.

设 $y=\frac{20}{x}$，由反比例函数的图像和性质得: $\frac{8}{3} < y \leqslant 8$，即 $\frac{8}{3} < v+2 \leqslant 8$，∴ $\frac{2}{3} < v \leqslant 6$.

答：动点 N 运动速度 v(cm/s)的取值范围为 $\frac{2}{3} < v \leqslant 6$.

②(方法一)过点 P 作 $PQ \perp AD$ 于点 Q，$PH \perp BC$ 于点 H.

∵AD=10，CD=5，∴AC=$5\sqrt{5}$.

∵AP=$2\sqrt{5}$，$PQ \perp AD$，$\angle ADC = 90°$，∴$PQ /\!/ CD$，∴$\triangle APQ \backsim \triangle ACD$，

∴ $\frac{AP}{AC}=\frac{PQ}{CD}=\frac{AQ}{AD}$，∴$PQ$=2，$AQ$=4，∴$PH$=3，$DQ$=6.

∵动点 M，N 在线段 BC 上相遇(不包含点 C)，

$S_1 = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle MPC} - S_{\triangle MAB}$

$=\frac{1}{2}\times 10\times 5-\frac{1}{2}\times 3\times(15-2x)-\frac{1}{2}(2x-5)\times 5=-2x+15$.

$S_2 = S_{\triangle DCP} + S_{\triangle MCP} - S_{\triangle DCM}$

$=\frac{1}{2}\times 5\times 6+\frac{1}{2}\times 3\times(15-2x)-\frac{1}{2}\times 5\times(15-2x)=2x$.

∴ $S_1 \cdot S_2=(-2x+15)\times 2x=-4x^2+30x=-4(x-\frac{15}{4})^2+\frac{225}{4}$. ∵ $\frac{5}{2} \leqslant \frac{15}{4} < \frac{15}{2}$

∴当 $x=\frac{15}{4}$ 时，$S_1 \cdot S_2$ 取得最大值，最大值为 $\frac{225}{4}$.

答：当 $x=\frac{15}{4}$ 时，$S_1 \cdot S_2$ 有最大值，最大值为 $\frac{225}{4}$.

(方法二) 过点 P 作 $PQ \perp AD$ 于点 Q，$PH \perp BC$ 于点 H.

∵AD=10，CD=5，∴AC=$5\sqrt{5}$.

∵AP=$2\sqrt{5}$，$PQ \perp AD$，$\angle ADC = 90°$，∴$PQ /\!/ CD$，∴$\triangle APQ \backsim \triangle ACD$，

∴ $\frac{AP}{AC}=\frac{PQ}{CD}$，∴$PQ$=2.

∵动点 M，N 在线段 BC 上相遇(不包含点 C)，

∴ $S_1+S_2=S_{\triangle MAD} - S_{\triangle APD} = \frac{1}{2}\times 10\times 5-\frac{1}{2}\times 10\times 2=15$，∴ $S_2=15-S_1$.

$\therefore S_1 \cdot S_2 = S_1(15-S_1) = -(S_1-\frac{15}{2})^2+\frac{225}{4}$.

$\therefore$当$S_1=\frac{15}{2}$时，$S_1 \cdot S_2$取得最大值，最大值为$\frac{225}{4}$.

$\because S_1 = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle MPC} - S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2}\times 10\times 5-\frac{1}{2}\times 3\times(15-2x)-\frac{1}{2}(2x-5)\times 5 = -2x+15$.

$\therefore$当$S_1=\frac{15}{2}$，求得$x=\frac{15}{4}$.

答：当$x=\frac{15}{4}$时，$S_1 \cdot S_2$有最大值，最大值为$\frac{225}{4}$.

28．（本题满分 10 分）

解：（1）$\because$抛物线$y=-x^2+(a+1)x-a$.

$\therefore$令$y=0$，解得$x=1$或$x=a$，$\because$点A位于点B的左侧，

$\therefore$点A的坐标为$(a,0)$ $(a<0)$，B的坐标为$(1,0)$.

令$x=0$，解得$y=-a$，$\therefore$点C的坐标为$(0,-a)$.

$\therefore AB=1-a$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(1-a)\times(-a)=6$，即$a^2-a-12=0$.

解得$a=-3$或$a=4$．$\because a<0$，$\therefore a=-3$.

$\therefore$二次函数的表达式为$y=-x^2-2x+3$.

（2）$\because a=-3$，$\therefore A(-3,0)$，$C(0,3)$，$\therefore AO=OC=3$，又$\because \angle AOC=90°$，

$\therefore \angle OAC=\angle OCA=45°$，

$\therefore$线段AC的垂直平分线与$\angle AOC$的角平分线所在的直线$y=-x$重合.

$\because A(-3,0)$，$B(1,0)$，

$\therefore$线段AB的垂直平分线是过点（−1, 0）且平行于y轴的直线.

$\triangle ABC$外接圆圆心在线段AB的垂直平分线上，又在线段AC的垂直平分线上.

$\therefore \triangle ABC$外接圆圆心的坐标为$(-1,1)$.

（3）过点A作$AE\perp PB$于点E，过点Q作$QF\perp PB$于点F，记PA与BQ的交点为G，延长PQ与x轴交于点H.

$\because AB=4$，点P到x轴的距离为d，$\therefore S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}\times AB\times d=2d$.

$\because S_{\triangle QPB}=2d$，$\therefore S_{\triangle APB}=S_{\triangle QPB}$，$\therefore \frac{1}{2}\times PB\times AE=\frac{1}{2}\times PB\times QF$，

$\therefore AE=QF$，$\because AE\perp PB$，$QF\perp PB$，$\therefore$四边形$AEFQ$为矩形，$\therefore AQ \parallel BP$.

∵ $\angle PAQ=\angle AQB$，∴$GQ=GA$.

∵AQ // BP，∴$\angle PAQ=\angle APB$，$\angle AQB=\angle QBP$，∴$\angle APB=\angle QBP$.

∴$GB=GP$，∴$GB+GQ=GP+GA$，即 $PA=BQ$.

在$\triangle APB$与$\triangle QBP$中，$\begin{cases} PA=BQ, \\ \angle APB=\angle QBP, \\ PB=BP. \end{cases}$

∴$\triangle APB\cong\triangle QBP$.

∵ $\angle CAO=45°$，且 AQ // BP ，∴$\angle ABP=\angle CAO=45°$.

又∵$\triangle APB\cong\triangle QBP$，∴$\angle QPB=\angle ABP=45°$，

∴$\angle PHB=90°$，∴P，Q，H 三点的横坐标相等，且 $BH=PH$.

∵点 P 在抛物线 $y=-x^2-2x+3$ 上，

设点 P 的坐标为 $(t,-t^2-2t+3)$，

∴点 H 的横坐标也为 t，

∵$BH=PH$，∴$1-t=-(-t^2-2t+3)$，

解得 $t=-4$ 或 $t=1$（舍去）.

∴点P的横坐标为-4，∴点Q的横坐标也是-4.

∵直线 AC 经过点 $A(-3,0)$，$C(0,3)$，

∴利用待定系数法可得直线AC的表达式为$y=x+3$.

∵点 Q 在 AC 上，∴点 Q 的坐标为 $(-4,-1)$.